

# DIDACHUT 3<sup>®</sup>

## Chute de 2 billes

**MD02103**



### 1. Présentation

#### 1.1. Finalité du produit

Cet appareil permet de visualiser simultanément la chute de deux billes de masses différentes, mais de volume identique dans deux tubes remplis d'huile.

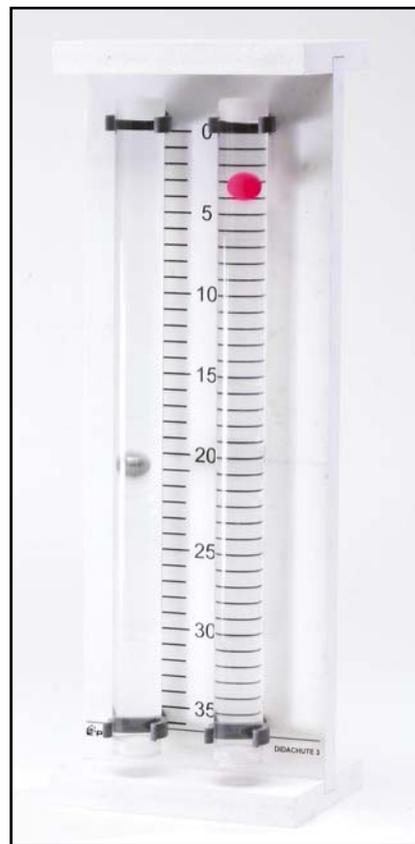
Ceci permet :

- De mettre en évidence l'influence de la masse dans le cas d'une chute dans un milieu visqueux.
- L'observation de mouvements rectilignes uniformes.
- Le calcul de la viscosité de l'huile

L'ensemble pourra être filmé pour une analyse numérique et la mise en évidence d'une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse en utilisant la méthode d'Euler.

#### 1.2. Composition

- 1 support vertical gradué en cm, en polystyrène expansé, muni de colliers nicoll permettant de fixer les tubes au support
- 2 tubes plexiglas Ø 30 mm
- 1 bille en acier magnétique Ø 17 mm. Masse : 20 g
- 1 bille en plastique (munie d'un noyau magnétique) Ø 17 mm. Masse : 5 g.
- 1 litre d'huile de paraffine (ou huile de vaseline de densité  $d = 0,86$ ) pour le remplissage des tubes
- 2 bouchons de protection (le bouchon est creux sur sa partie supérieure). Ils sont à disposer en partie basse de chaque tube. La difficulté de leur mise en place et de leur retrait assure l'étanchéité du système.
- 2 bouchons de fermeture (le bouchon est creux au niveau de sa partie inférieure). Ils sont à disposer sur le haut des tubes après le remplissage
- 2 aimants en ferrite permettant de faire remonter les billes magnétiques sans avoir à retourner le support. Ils peuvent être disposés sur les bouchons de fermeture pour faire « tenir » les billes en haut des tubes.



## 2. Installation

### 2.1. Montage

Remplir les tubes en plexiglas avec l'huile en laissant un petit espace vide. Introduire une bille dans chaque tube. Compléter alors en totalité afin de ne pas emprisonner d'air. Introduire le bouchon supérieur (bouchon de fermeture). Essuyer totalement l'huile. Vérifier l'absence de bulle d'air dans le tube. Placer alors les deux tubes sur le support. L'appareil est alors prêt pour les manipulations

### 2.2. Rangement

L'appareil sera rangé de préférence verticalement, l'huile étant remise dans le flacon d'origine, après chaque utilisation, afin d'éviter tout risque de fuites.

### 2.3. Entretien

Le support et les tubes seront nettoyés avec un chiffon doux et sec, afin d'enlever la poussière éventuelle et surtout les traces laissées par les doigts des élèves.

## 3. Utilisations

### 3.1. Rappels succincts : étude dynamique de la chute verticale d'une bille dans un liquide

Elle peut se faire à partir d'un diagramme objet - interactions qui conduit à la représentation des forces ci -contre :

Le solide, une bille de rayon  $R$ , dans le référentiel lié à la terre (galiléen), est soumis à :

son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{bille} Vg \cdot \vec{j}$

la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi} = -\rho_{liquide} Vg \cdot \vec{j}$

la force de frottement fluide  $\vec{f} = -6\pi R\eta\vec{v}$  ou  $\vec{f} = -kv^2\vec{j}$

La 2<sup>ème</sup> loi de Newton appliquée à la bille donne :

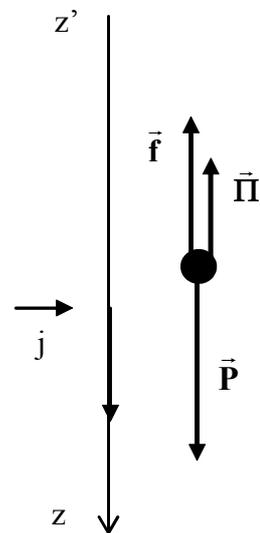
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projection sur l'axe  $z'z$  :

$$P - \Pi - f = ma = m \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1)$$

soit

$$\rho_{bille} Vg - \rho_{liquide} Vg - f = \rho_{bille} v \frac{d^2z}{dt^2} \quad (2)$$



En posant  $v = \frac{dz}{dt}$  et en divisant par  $m = \rho_{bille} V$ , on obtient alors :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{\rho_{bille} V} v = \left(1 - \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{bille}}\right) g \quad (3) \quad \text{si } f = kv$$

ou 
$$\frac{dv}{dt} + kv^2 = \left(1 - \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{bille}}\right) g \quad (4) \quad \text{si } f = kv^2$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre en  $v = \frac{dz}{dt}$ , c'est à dire la vitesse.

La résolution met en évidence un phénomène transitoire, très bref, durant lequel, La bille va adopter un mouvement accéléré (quelques centièmes de secondes). Ensuite le mouvement sera rectiligne et uniforme : le système pourra alors être considéré comme pseudo-isolé, puisque les forces extérieures se compensent.

### 3.2. Influence de la masse de la bille

La bille la plus dense tombe plus rapidement que l'autre.

### 3.3. Comment vérifier l'expression de la force de frottement $f = kv$

La force de frottement a cette expression, lorsque l'écoulement est laminaire autour de la bille. Le frottement dû à la viscosité est dominant.

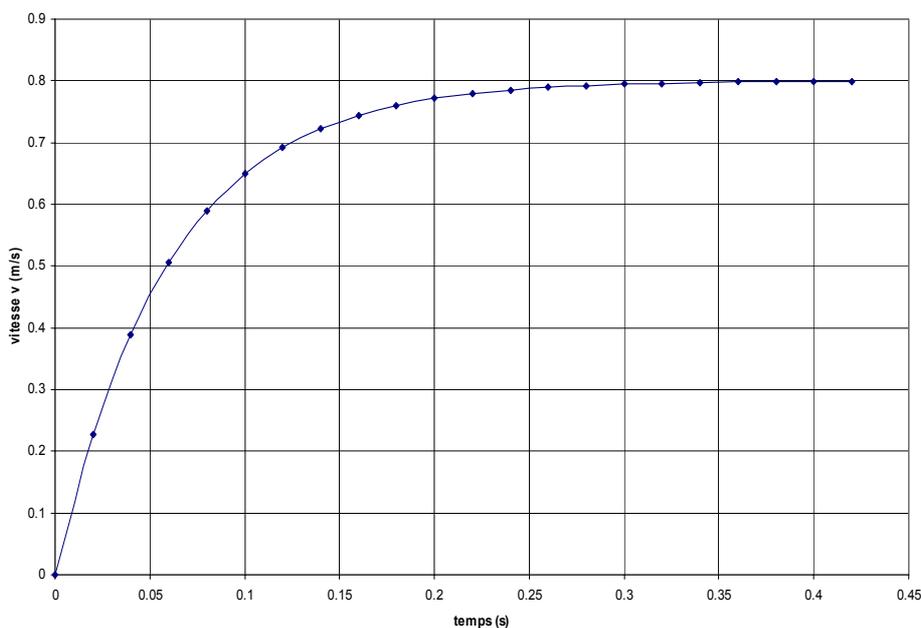
L'équation différentielle (3) établie précédemment est du type  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = A$ , la solution est donc :

$$v(t) = A \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

avec  $\tau$  constante de temps caractéristique du phénomène.

On doit observer un régime transitoire durant  $5 \tau$ , au cours duquel la bille accélère, puis un régime permanent correspondant à un mouvement rectiligne uniforme.

Le graphe représentant l'évolution de la vitesse au cours du temps est du type du graphe représenté ci-dessous :



La solution analytique de l'équation  $m = \rho_{bille} v$  différentielle (3) est donc :

$$v(t) = \frac{2R^2 \rho_{bille} g}{9\eta} \left(1 - \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{bille}}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{2R^2 \rho_{bille}}{9\eta}$$

La vitesse limite est atteinte à la fin du régime transitoire, elle s'exprime par :

$$v_{limite} = \frac{2R^2 \rho_{bille} g}{9\eta} \left(1 - \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{bille}}\right)$$

Ainsi, si le rayon de la bille augmente, alors la vitesse limite augmente ainsi que la durée du régime transitoire.

De même, l'augmentation de la masse volumique accroît le temps caractéristique  $t$  de manière proportionnelle ; c'est pour cela, que l'on observe bien le régime transitoire avec la bille en acier, mais pas avec la bille plastique, car il est trop court (le régime transitoire est mis en évidence avec la bille plastique, si on utilise un liquide plus visqueux, comme la glycéline).

### 3.4 Comment vérifier l'expression de la force de frottement $f = kv^2$

Remarque : La force de frottement a cette expression lorsque l'écoulement est turbulent autour de la bille : sa vitesse doit être grande. Cependant l'autre force de frottement en  $f = kv$  est souvent présente de manière non négligeable, dans le cas de chute dans des fluides visqueux, aussi on trouve une force résultante  $f = kv^m$  avec  $m$  compris entre 1 et 2.

Nous n'avons pas voulu proposer un matériel ne donnant pas un résultat clair aux élèves et nous avons décidé de travailler dans la gamme  $f = kv$ .

La force  $f = kv^2$  intervient par contre beaucoup en aérodynamisme.

L'expression vectorielle de la force est :  $\vec{f} = -\frac{1}{2} C.S.v^2 \vec{j}$

Avec  $C$  : coefficient de traînée = 0,15 USI pour une sphère  
 $S$  : surface de projection de la bille =  $\pi R^2$

En reprenant l'expression de l'équation différentielle (4), on obtient alors :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{CS\rho_{liquide}}{2\rho_{bille}V} v^2 = \left(1 - \frac{\rho_{bille}}{\rho_{liquide}}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{3C\rho_{liquide}}{8\rho_{bille}R} v^2 = \left(1 - \frac{\rho_{bille}}{\rho_{liquide}}\right)$$

L'équation différentielle est donc du type  $\frac{dv}{dt} + Av^2 = B$

La vitesse limite sera atteinte à la fin du régime transitoire ( $\frac{dv}{dt} = 0$ ) et aura pour valeur :

$$v_{limite} = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{8(\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \cdot R \cdot g}{3C\rho_{liquide}}}$$

La viscosité dynamique  $\eta$  du liquide n'intervient pas.

Pour déterminer la bonne expression de la force de frottement, il faut donc comparer les résultats expérimentaux (vitesse limite, courbes) avec les valeurs calculées ou les courbes modélisées.

### 3.5 Vérification expérimentale

Pour obtenir une courbe vitesse en fonction du temps, il faut filmer l'expérience (en présence de repères horizontaux et verticaux pour les échelles) avec une webcam (à 25 images par seconde et une obturation réglée à  $1/100^{\text{ème}}$  de seconde) et un logiciel tel que Virtualdub ou encore IPI, MT21934.

On réalise ensuite le montage du film, avec une version récente de Aviméca 2, pour ne garder que les images intéressantes du film, puis un traitement de la séquence.

Les résultats se trouvent alors sous forme d'un fichier, contenant les coordonnées spatiales d'un point de la bille étudiée, associées à des dates précises.

Ce fichier est analysé avec un logiciel comme Régressi par exemple, permettant le tracé des courbes expérimentales et modélisées.

#### Procédure :

- Placer les deux billes en position haute. Elles sont maintenues avec un aimant droit, qui les retient.
- Déclencher le tournage, puis enlever l'aimant droit ; les billes tombent. Attendre la fin de la chute et du tournage.
- Visionner le film pour vérifier si tout est correct, sinon une autre séquence est nécessaire.

Ce fichier est enregistré dans l'ordinateur au format AVI (Audio Video Interleave)

- Ouvrir le logiciel Avimeca 2, puis ouvrir le fichier vidéo précédent. Rechercher alors la première image correspondant à la chute de la bille : cette image sera l'origine des temps.
- Fixer les échelles horizontales et verticales, en utilisant la procédure d'étalonnage.
- Déclencher ensuite le repérage de la position de chaque bille en cliquant sur le bouton mesure. Il suffit alors de cliquer sur le centre de la bille ou le bas de la bille pour chaque date, l'image suivante apparaît automatiquement.
- Enregistrer alors le fichier au format rrr ou rw3.
- Ouvrir le logiciel Regressi, puis le fichier précédent et faire tracer les courbes  $y = f(t)$ , ce qui correspond à l'évolution de la position du centre de gravité de la bille au cours du temps.

Procéder ensuite au calcul automatique de la dérivée  $v(t)$  à partir des valeurs d'ordonnées de la bille. Tracer alors le graphe vitesse au cours du temps, ce qui permet la mise en évidence du régime transitoire.

### 3.6 Mesure de la viscosité dynamique $\eta$ du liquide

Le mouvement devient très rapidement uniforme, car la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à la bille devient nulle. La relation (2) se simplifie en :

$$\eta = \frac{2}{9} g R^2 (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \frac{t}{l}$$

$\frac{dz}{dt}$  est la vitesse de la bille, qui peut être remplacée par  $\frac{l}{t}$  où  $l$  est la distance parcourue durant l'intervalle de temps  $t$ .

Ainsi  $\rho_{bille} Vg - \rho_{liquide} Vg - 6\pi R\eta \frac{l}{t} = 0$  or  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

soit après simplification :

$$\eta = \frac{2}{9} g R^2 (\rho_{bille} - \rho_{liquide}) \frac{t}{l}$$

La viscosité dynamique est donc proportionnelle au temps de chute pour une hauteur parcourue constante : c'est le principe de fonctionnement des tubes à chute de bille industriels.

### 3.6 Caractéristiques techniques

	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Viscosité (Pa.s)	Diamètre (mm)
Bille d'acier	7780		17,0
Bille plastique	1940		17,0
Huile de paraffine	860	1,2 *	

\* la viscosité dépend de la température, cette valeur est approximative à 20 °C.

## 4. Maintenance

- \* Toutes les opérations de maintenance ou de réparation doivent être réalisées par  PIERRON
- \* En cas de problème contacter notre service Relations Clients